

Tipps für das Nachdenken über mathematische Probleme

Du möchtest Dich mit mathematischen Problemen beschäftigen. Beim Einstieg können Dir die folgenden Tipps helfen. Sie sind natürlich kein Patentrezept, das für alle passt.
Schau einmal, was Dich neugierig macht und was Du ausprobieren möchtest.

Das folgende Inhaltsverzeichnis hilft Dir bei der Orientierung.

Inhaltsverzeichnis

1 Denken und Schreiben: Ein Beispiel.....	2
2 Denken und Schreiben: Elemente.....	3
2.1 Tipps zu Denkwerkzeugen.....	3
2.2 Tipps zu Aufzeichnungen.....	3
2.3 Tipps zur Organisation der Aufzeichnungen.....	5
3 Sammlung der Denkwerkzeuge.....	6
3.1 Wie ist die Sammlung der Denkwerkzeuge aufgebaut?.....	6
3.2 Wichtig: Leg Deine eigenen Sammlungen von Werkzeugen an.....	6
3.3 Allgemeine Werkzeuge: Was kann ich in jeder Situation versuchen?.....	8
3.4 Wie kann ich anfangen?.....	8
3.5 Welche Standard-Ansätze kann ich untersuchen?.....	9
3.6 Welche speziellen mathematischen Techniken kann ich ausprobieren?.....	10
3.7 Wie kann ich neue Lösungsansätze erzeugen?.....	12
3.8 Wie kann ich einen Lösungsplan entwerfen?.....	13
3.9 Was kann ich tun, wenn ich feststecke?.....	14
3.10 Wie kann ich in Bildern denken?.....	14
3.11 Wie kann ich prüfen, ob meine Lösung richtig ist?.....	15
3.12 Wie kann ich mathematisches Wissen über Dinge in der Aufgabe erwerben?.....	15
3.13 Was sollte ich vermeiden?.....	15
3.14 Wie kann ich die fertige Lösung aufschreiben?.....	15
4 Leseempfehlungen und Links.....	16
5 Zum Abschluss: Übersicht der Denkwerkzeuge.....	16

1 Denken und Schreiben: Ein Beispiel

Beim Nachdenken über ein mathematisches Problem kann es enorme Vorteile haben, zwei Dinge miteinander zu verzahnen: Denken im Kopf und Schreiben auf Papier.

Wie könnte das aussehen?

Nehmen wir einmal an, Du schreibst auf DIN A4-Blättern im Querformat, die Du in der Mitte unterteilt hast.

(Im folgenden Beispiel gehen wir nicht auf mathematische Details ein – uns geht es zunächst um Vorgehensweisen beim Denken und Schreiben. Wenn also ein Ausdruck $f(n)$ oder eine Tabelle auftauchen, so ist natürlich nicht gemeint, dass es in jeder Aufgabe ein $f(n)$ gibt oder eine Tabelle sinnvoll ist – wir wollen nur darstellen, wie in einem solchen Fall Denken und Schreiben verbunden werden können.)

Beispiel:

So könntest Du denken ...

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

- A) „Das sieht zunächst mal kompliziert aus. Als erstes führe ich für diese Aufgabe passende Bezeichnungen ein.“
- B) „Dann liste ich in mathematischer Schreibweise auf, was bekannt ist.“
- C) „Dann schreibe ich auf, was gesucht ist.“
- D) „Ich fertige eine Tabelle für die einfachsten Fälle an. Vielleicht kann ich dabei ein Muster erkennen.“

<p>A) <u>Bezeichnungen:</u> f(n) ist ...</p> <p>B) <u>Was ist bekannt?</u> → für f(n) gilt: 1) ... 2) ...</p> <p>C) <u>Was ist gesucht?</u> → zu zeigen ist: f(n) = ...</p>	<p style="text-align: center;"><u>Tabelle</u></p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px;">n</th> <th style="padding: 2px;">f(n)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">...</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">...</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">...</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">...</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">...</td></tr> </tbody> </table>	n	f(n)	1	...	2	...	3	...	4	...	5	...
n	f(n)												
1	...												
2	...												
3	...												
4	...												
5	...												

- E) „Jetzt stehe ich im Nebel. Ich liste mal auf, welche Schwierigkeiten es hier gibt.“
- F) „Das sind also die Schwierigkeiten – was kann ich jetzt tun?
Ich sammle einmal Ideen.“
- G) „Aha! Hier ist ein neuer Ansatz A!“

<p>E) <u>Schwierigkeiten</u> → Wo hakt es? → $f(0) = ?$ → ... → $f(n+1) - f(n) = ?$ → ...</p>	<p style="text-align: center;"><u>Ideen: Was tun?</u></p> <p>→ Annahme: f(n)-1 ist nicht ...</p> <p>→ Beweis mit Induktion?</p> <p>→ aha: Ansatz A</p>
---	--

- H) „Hier untersuche ich den Ansatz A. Dabei probiere ich es mit einer Fallunterscheidung.“
- I) „Der neue Ansatz hat neue Einsichten gebracht, aber jetzt stecke ich fest. Wo liegen diesmal die Schwierigkeiten? Ich liste einmal die Unklarheiten auf.“

<p>H) <u>Ansatz A</u> → Idee: Fallunterscheidung → Fall 1: ... → Fall 2: ...</p>	<p style="text-align: center;"><u>Schwierigkeiten</u></p> <p>→ was ist unklar? → Unklarheit 1: ... → Unklarheit 2: ...</p>
--	--

2 Denken und Schreiben: Elemente

Bei dem Vorgehen aus dem Beispiel kannst Du also folgende Elemente miteinander kombinieren:

- Denkwerkzeuge
Denkwerkzeuge oder kurz Werkzeuge sind all die Dinge, die Dich bei der Suche nach der Lösung einer Aufgabe voranbringen können: Das Einführen von Bezeichnungen, die Frage nach dem Bekannten und dem Gesuchten, das Anfertigen einer Zeichnung oder einer Tabelle, das Sammeln von Schwierigkeiten oder von Ideen.
Auch Fragen mit Bezug auf mathematische Aussagen sind in diesem Sinne Werkzeuge, etwa „Wie könnten mir hier die Strahlensätze weiterhelfen?“.
- Aufzeichnungen
Aufzeichnungen mit Skizzen, Formeln und Texten haben viele Vorteile:
 - Sie helfen, Ideen zu sammeln, zu präzisieren, weiter zu entwickeln, zu überprüfen und zu dokumentieren.
 - Sie unterstützen die Konzentration – auch nach Ablenkungen findest Du Dich schnell wieder zurecht.
 - Sie entlasten das Gedächtnis.
- Organisation der Aufzeichnungen
Mathematische Probleme sind oft anspruchsvoll, und deshalb brauchst Du bis zur fertigen Lösung Konzentration, viel Scharfsinn, noch mehr Ausdauer und fast immer etliche Anläufe.
Mit einer guten Organisation Deiner Aufzeichnungen behältst Du leichter den Überblick.

Es folgen Tipps zu diesen Elementen.

2.1 Tipps zu Denkwerkzeugen

- Einer der wichtigsten Ratschläge:
Es ist immer gut, Fragen zu stellen und nach Antworten zu suchen.
- Werkzeuge für den Umgang mit Schwierigkeiten spielen beim Problemlösen eine zentrale Rolle.
Vielleicht helfen Dir einfache Fragen und Sätze:
 - „Wo hakt es hier?“
 - „Was ist hier unklar?“
 - „Was passt mir hier nicht?“
 - „Das Objekt A ist sonderbar, denn...“
 - „Ich komme nicht weiter, weil ...“Aus dem Verständnis der Schwierigkeiten ergeben sich oft Ideen für neue Lösungsansätze.
- Manche Werkzeuge wirst Du vermutlich oft benutzen – vielleicht findest Du Abkürzungen hierfür nützlich:
 - das Sammeln von Fragen (F) oder
 - das Sammeln von Ideen (I) oder
 - die Untersuchung von Schwierigkeiten (S).
- Leg eine eigene Sammlung von Werkzeugen an – unsere Vorschläge am Schluss helfen Dir beim Start.
- Wenn Du Dich weiter mit mathematischen Problemen beschäftigst, wirst Du Dein Repertoire an Werkzeugen vergrößern. Bücher, Webseiten und Gespräche können dabei helfen.

2.2 Tipps zu Aufzeichnungen

- Probier aus, mit welchen Papierformaten und mit welchen Aufteilungen der Blätter Du gut arbeiten kannst:
 - Papierformate DIN A5, A4 oder A3,
 - kariert oder blanko,
 - Querformat oder Hochformat,
 - ohne Aufteilung oder mit zwei oder drei Spalten.
- Unsere Empfehlung: DIN A4 kariert im Querformat als eine Art Standard, je nach Inhalt des Blattes ohne Aufteilung (besonders für Skizzen geeignet) oder mit 2 Spalten.
- Ein Layout mit zwei oder mehr Spalten hat den Vorteil, dass Du Notizen zu einem neuen Nebengedanken an einem neuen Ort auf demselben Blatt aufschreiben kannst und nicht die laufenden Notizen unterbrechen musst.
Insbesondere kannst Du in einer Spalte rechts auf Schwierigkeiten in einer Spalte links reagieren.
- Eine andere nützliche Darstellung sind sogenannte Gedankenkarten – bei ihnen steht das Thema in der Mitte des Blatts, von diesem Thema gehen dann Zweige und von den Zweigen Unterzweige ab.
Wenn es um die Sammlung von Ideen geht, sind solche Gedankenkarten oft hilfreicher als lineare Listen – in den Gedankenkarten kannst Du leichter Einfälle ergänzen und zwischen verschiedenen Einfällen hin und her springen.

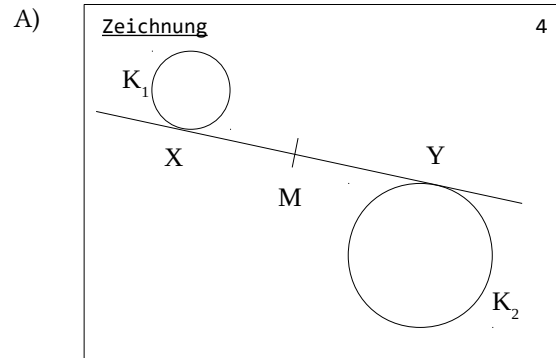
Nach einer Sammlung von Ideen in einer Gedankenkarte kannst Du in der Gedankenkarte Verweise auf neue Blätter machen, in denen Du eine Idee dann im Detail untersuchst.

- Wenn Du die Blätter nur auf der Vorderseite beschreibst, ersparst Du Dir viel Herumsucherei.

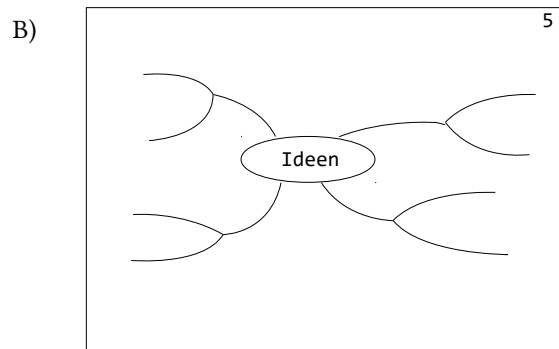
Aufzeichnungen machen:
So könntest Du denken ...

- A) Layout 1: Ganzseitige Skizzen
 „Ich fertige erst einmal eine sorgfältige geometrische Zeichnung der Situation an. Das ist auf einem eigenen Blatt sinnvoll.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:



- B) Layout 2: Ganzseitige Gedankenkarten
 „Auf diesem Blatt geht es um eine Sammlung von Ideen. Dabei gibt es oft Gedankensprünge, und deshalb mache ich keine linearen Notizen, sondern benutze eine Gedankenkarte.“



- C) Layout 3: 2-Spalten-Notizen
 „Auf diesem Blatt geht es um die Detail-Untersuchung eines Ansatzes. Ich stoße vermutlich auf Schwierigkeiten, die ich dann aber in der rechten Spalte betrachten kann.“

C)

<u>Ansatz</u>	<u>Schwierigkeiten</u> 7
Grundidee:	Wo hakt es hier?
...	...
...	...
Rechnungen:	...
...	
...	

2.3 Tipps zur Organisation der Aufzeichnungen

- Wenn Du auf losen Blättern schreibst und nicht in Heften, kannst Du überall und jederzeit neue Blätter einfügen,
 - wenn Du Ideen weiter entwickeln oder
 - wenn Du Anschlussfragen untersuchen oder
 - wenn Du Schwierigkeiten betrachten willst.
- Außerdem kannst Du bei der Arbeit auf losen Blättern frühere Aufzeichnungen direkt vor Dir liegen haben – das ist ein großer Vorteil gegenüber einem Herumblättern in Heften.
- Vielleicht hilft es Dir, wenn Du die Blätter mit Deinen Aufzeichnungen in einer Struktur wie der folgenden anordnest und nummerierst.
Bei den Blättern 1, 2, und 3 fängt jeweils ein Ansatz oder ein neuer Gedankengang an, der auf den untergeordneten Blättern weiter untersucht wird.
- Du kannst die Blätter in der unten skizzierten, überlappenden Weise auf der Tischfläche auslegen und dann leicht dasjenige Blatt herausziehen, mit dem Du weiterarbeiten willst.
- Du kannst bei Bedarf Deine bisherigen Einsichten zusammenfassen und auf Grundlage dieser Zusammenfassung weiterarbeiten.

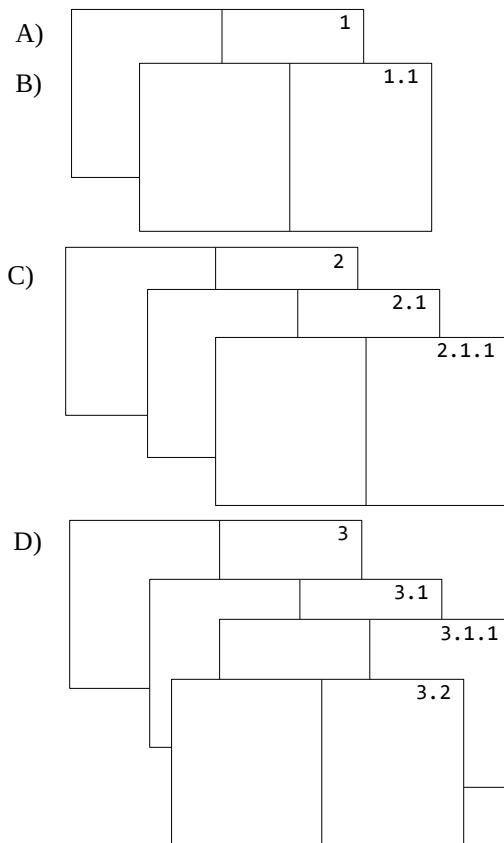
Aufzeichnungen organisieren:

So könntest Du denken ...

- A) „Ich fange auf Blatt 1 mit meinen Überlegungen an.“
- B) „... und setze sie auf Blatt 1.1 fort.
Dabei kann ich vom Blatt 1 auf Blatt 1.1 und von Blatt 1.1 zurück auf Blatt 1 verweisen – so kann ich auch später leichter die Zusammenhänge zwischen Ideen erkennen.“
- C) „Ich bin jetzt auf eine wichtige neue Idee gestoßen. Um sie zu untersuchen, fange ich ein neues Blatt mit Nummer 2 an.
Die weiteren Untersuchungen mache ich dann wieder auf untergeordneten Blättern.“
- D) „Und jetzt bin ich wieder bei einem neuen Ansatz, mit dem ich das neue Blatt 3 beginne.“

„Ich kann hier flexibel arbeiten:
Wenn mir jetzt eine gute Idee zum Blatt 1.1 kommt, lege ich das aktuelle Blatt beiseite, ziehe Blatt 1.1 hervor, arbeite dort weiter, kann bei Bedarf ein Blatt 1.1.1 einfügen und am Ende wieder zum aktuellen Blatt zurückkehren.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:



3 Sammlung der Denkwerkzeuge

3.1 Wie ist die Sammlung der Denkwerkzeuge aufgebaut?

Wir haben uns für die folgende Gliederung entschieden.

- Wir listen grundlegende Fragen auf, die in typischen Situationen bei der Arbeit an mathematischen Problemen immer wieder auftreten, zum Beispiel:
 - Wie kann ich anfangen?
 - Wie kann ich Lösungsansätze erzeugen?
 - Wie kann ich Lösungsansätze entwickeln?
 - Was kann ich tun, wenn ich in Schwierigkeiten stecke?
- Zu jeder dieser Fragen und Situationen stellen wir dann Werkzeuge vor.

3.2 Wichtig: Leg Deine eigenen Sammlungen von Werkzeugen an

Dein Werkzeug-Repertoire wird sich mit der Zeit verändern – manche Werkzeuge werden ganz selbstverständlich, manche verlieren an Bedeutung, neue kommen hinzu. Deshalb möchten wir nicht den Eindruck entstehen lassen, dass es eine Art „universellen Spickzettel“ für das Problemlösen geben könnte.

Wir empfehlen: Leg Deine eigenen Sammlungen von Werkzeugen an.

Hier sind Tipps dazu.

- Zum einen kannst Du Werkzeuge nach Situationen gliedern, so, wie wir es oben beschrieben haben.
Nützliche Fragen dazu:
 - In welchen Situationen könntest Du Hilfe brauchen?
 - Wie könnten Werkzeuge für diese Situationen aussehen?
 - Besonders wichtig sind vermutlich die folgenden Fragen:
 - Was kannst Du tun, um neue, andersartige Ansätze zu erzeugen?
 - Was kannst Du tun, um Ansätze besser weiter zu entwickeln?
 - Was kannst Du tun, wenn Du feststeckst?
- Außerdem kannst Du Werkzeuge nach mathematischen Themen oder Objekten oder Fragestellungen gliedern.
Nützliche Fragen dazu:
 - Welche Werkzeuge sind nützlich für den Umgang mit Dreiecken? Mit Fragen der Teilbarkeit? Mit Polynomen? Usw.

Eigene Werkzeugsammlungen:

So könntest Du denken ...

- A) „Ich lege zunächst eine Werkzeugsammlung an zu der Frage „Wie kann ich anfangen?““

- B) „Jetzt kommt eine Sammlung für den Umgang mit Fragen der Teilbarkeit.“

„Diese Sammlungen kann ich nach Bedarf erweitern oder anpassen.
Natürlich benutze ich die Sammlungen immer wieder und erweitere sie, wenn ich auf neue nützliche Werkzeuge stoße.“

... und so könnten Deine Werkzeugsammlungen aussehen:

A)

<u>Wie kann ich anfangen?</u>	...
	...
	...
> Führe Bezeichnungen ein.	
> Was ist bekannt?	
> Was ist gesucht?	
> ...	
> ...	

B)

<u>Teilbarkeit</u>	<u>Allgemeine Teilbarkeitsregeln:</u>
<u>Teilbarkeitsregeln für</u>	...
2:
3: ...	
4: ...	<u>Teilbarkeit und Primzahlen:</u>
5:
6:
8: ...	
9: ...	
11: ...	
...	

3.3 Allgemeine Werkzeuge: Was kann ich in *jeder* Situation versuchen?

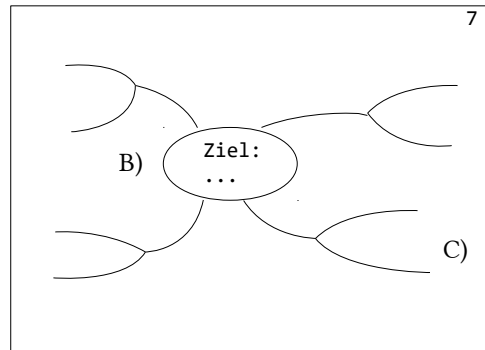
- Sammle und untersuche Fragen (Abkürzung: F).
 - Was sind hier die Kern-Fragen?
- Sammle und untersuche Schwierigkeiten (Abkürzung: S).
 - Wo hakt es hier?
 - Was ist hier unklar?
- Sammle Ideen für Fortschritte (Abkürzung: FS).
 - Leitfragen:
 - Wie könnte ich hier weiterkommen?
 - Was könnte ein sinnvoller nächster Schritt sein?
- Sammle Ziele (Abkürzungen: Z)
 - Was will ich?
- Mache einen Plan (Abkürzung: P)
 - Wie kann ich das ausgewählte Ziel erreichen?
 - Du kannst hier die sogenannte „Wie-wie-Technik“ ausprobieren und einfach wiederholt „wie?“ fragen:
 - Wie kann ich das erreichen? - Indem ich A tue. -
 - Wie kann ich A tun? - Indem ich B und C tue. -
 - Wie kann ich B tun? Indem ich ... Wie kann ich C tun? Indem ich ... Usw.
 - Für dieses Vorgehen bietet es sich an, Aufzeichnungen in Form einer Gedankenkarte zu machen.
- Sammle Ideen (Abkürzung: I).

Mach einen Plan:

So könntest Du denken ...

- A) „Ich suche jetzt einmal nach dem Weg zu einem Ziel. Dazu versuche ich es hier einmal mit der Wie-wie-Technik.“
- B) „Ich beginne mit dem Ziel in der Mitte.“
- C) „Auf den Zweigen und den Unterzweigen sammle ich dann Ideen, wie ich die Teilziele auf der jeweils übergeordneten Ebene erreichen kann.“
- D) „Die Ideen aus der Gedankenkarte kann ich dann wieder im Detail untersuchen.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:



<u>Lösungsskizze</u>	7.1
...	7 ←
...	
...	

3.4 Wie kann ich anfangen?

- Führe Bezeichnungen für die beteiligten Objekte ein.
- Schreib mit Hilfe der Bezeichnungen auf: Was ist bekannt? Was ist gesucht?
- Fertige eine Zeichnung an.
- Führe Hilfsgrößen ein.
- Fertige eine Tabelle an.
- Versuche, die Informationen noch auf andere als die bisher gewählte Art darzustellen.
 - Z.B. als Gleichung, geometrisch, mit Hilfe unterschiedlicher Bezugspunkte...

Anfangen:

So könntest Du denken ...

- A) „Auf diesem Blatt 1 führe ich als erstes ein paar Bezeichnungen ein – welche davon später nützlich sind, werden wir sehen.“
- B) „Was ist in der Aufgabenstellung gegeben? Ich formuliere das mal mit Hilfe der Bezeichnungen, die ich eingeführt habe.“
- C) „Was ist gesucht? Auch das schreibe ich mal hin.“
- D) „Ich versuche einmal, ob ich die Situation aus der Aufgabenstellung in einer Skizze darstellen kann.“
- E) „Ich stelle einmal die einfachsten Fälle systematisch in einer Tabelle dar.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

A)	<u>Bezeichnungen</u>	<u>Skizze</u>	1 D)
B)	<u>Was ist bekannt?</u>	<u>Tabelle</u>	E)
C)	<u>Was ist gesucht?</u>		

3.5 Welche Standard-Ansätze kann ich untersuchen?

- Schreib auf, welche Ideen, Einsichten und Lösungsansätze Dir spontan einfallen.
- Werte die gegebenen Informationen aus.
 - Schreib erste Schlussfolgerungen auf.
- Werte Dein mathematisches Wissen aus.
 - Schreib auf, was Du über die Objekte weißt.
 - Schreib auf, welche Zusammenhänge Du kennst, insbesondere zwischen dem Bekannten und dem Gesuchten.
- Suche nach verwandten Problemen.
 - Schreib auf, welche verwandten Probleme Du kennst und was Du über sie weißt.
- Verändere das Problem.
 - Betrachte sehr einfache Fälle.
 - Betrachte spezielle Fälle.
 - Betrachte extreme Fälle und Grenzfälle.
 - Was passiert, wenn etwas immer größer oder immer kleiner wird?
- Zerlege das Problem in Teile.
 - Unterscheide verschiedene Fälle.
- Suche vorwärts, suche rückwärts.
 - Vorwärts: Was lässt sich aus den Voraussetzungen schließen?
 - Rückwärts: Fang mit dem Ziel an - wie könnte der vorletzte Schritt aussehen?
- Kannst Du eine Lösung erraten?
- Formuliere Vermutungen. Kannst Du diese Vermutungen beweisen oder widerlegen?
- Führe Hilfskonstruktionen ein.
 - Kannst Du Größen definieren, die Dir weiterhelfen?
- Probiere verschiedene Beweistechniken aus.
 - direkter Beweis.
 - Beweis durch Widerspruch.
 - Eine weitere wichtige Beweistechnik ist die vollständige Induktion.
 - Weitere Techniken findest Du im Wikipedia-Artikel über Beweise in der Mathematik.

Standard-Ansätze:
So könntest Du denken ...

- A) „Ich sammle auf meinem aktuellen Blatt 5 ein paar grobe Lösungsideen.“
- B) „Dann suche ich mir die aussichtsreichste Idee aus – das ist hier der Ansatz zum Widerspruchsbeweis. Zu dieser Idee mache einen Verweis auf ein neues Blatt 6.“

- C) „Auf dem neuen Blatt 6 mache ich mit dem Vermerk „5 ←“ einen Rück-Verweis auf Blatt 5 – dann weiß ich, woher die Idee stammt.“

„Auf diesem Blatt mache ich dann die weiteren Detail-Überlegungen zum Widerspruchsbeweis.“

- D) „Auf diesem Blatt probiere ich es jetzt mit der Vorwärtssuche nach einer Lösung.“
- „Was ist bekannt? Was folgt daraus? - Ich sammle hier alle einmal alles, was ich weiß oder ableiten kann. Aus der gegebenen Aussage $a \cdot b = c^2$ ergibt sich, dass $a \cdot b \geq 0$ ist. Und daraus folgt etwas über die Vorzeichen von a und b, nämlich ...“

- E) „Und auf diesem Blatt probiere ich es mit der Rückwärtssuche nach einer Lösung.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

A)	<u>Lösungsideen</u>	5
B)	→ Widerspruch → 6 → Induktion → ...	

C)	<u>Widerspruchsbeweis</u>	6 5 ←
	→ Annahme: X ist nicht prim	
	→ Was folgt daraus?	

D)	<u>Vorwärts</u>	9
	→ Was ist bekannt? Was folgt daraus? → ... → ...	

E)	<u>Rückwärts</u>	10
	Was ist das Ziel? Beschreibung: ... Wie komme ich zu diesem Ziel? Option 1: ... Option 2: ... Wie komme ich zu Option 1?	

3.6 Welche speziellen mathematischen Techniken kann ich ausprobieren?

Es gibt eine Reihe besonderer mathematischer Techniken, die gelegentlich in den Aufgaben mathematischer Wettbewerbe benutzt werden können.

- Was passiert, wenn Du Dinge einfärbst?
 - Das Einfärben ist ein mathematischer Trick, der manchmal schnell zur Lösung eines Problems führt.
 - Beispiel: Entferne aus einem quadratischen Feld der Größe 8x8 die linke obere und die rechte untere Ecke. Die verbleibenden 62 Felder lassen sich nicht mit Steinen der Größe 2x1 überdecken. Warum?

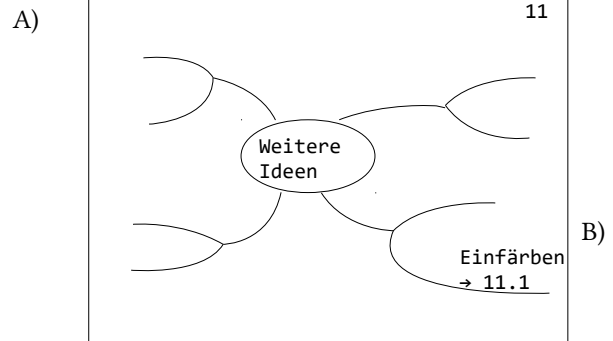
- Kannst Du Symmetrien erkennen oder konstruieren?
- Kannst Du Invarianten erkennen oder konstruieren, also Größen, die sich nicht verändern?
 - Beispiel: Zum Zeitpunkt 0 ist ein Zimmer leer. Dann kommt in jeder Minute entweder eine Person hinzu, oder zwei Personen verlassen das Zimmer. Das Zimmer kann nach 3^{1999} Minuten nicht $3^{1000}+2$ Personen enthalten. Warum? (Nach Ablauf von m Minuten können sich die dann möglichen Anzahlen von Personen im Zimmer nur wie unterscheiden? - Aus: „The Art and Craft of Problem Solving“ von Paul Zeitz.)
- Kannst Du das Schubfachprinzip benutzen?
 - Beispiel 1: Wenn Du 201 Steine auf 100 Schubfächer verteilst, so gibt es mindestens ein Schubfach, in dem sich mindestens 3 Steine befinden. Warum?
 - Beispiel 2: Es gibt eine durch 1234567 teilbare Zahl, die mit lauter Einsen beginnt, mit lauter Nullen endet und ansonsten keine weiteren Ziffern enthält. (Schau Dir die Folge 1, 11, 111, ... an und schau auf die Reste bei Division.)
- Spielt ein Wechsel zwischen gerade und ungerade eine Rolle?
 - Beispiel: Auf einer Tafel stehen die ganzen Zahlen von 1 bis 100. Du kannst immer wieder zwei davon wegstreichen und durch ihre Differenz ersetzen, bis nur noch eine Zahl übrig bleibt. Diese Zahl kann nicht die 17 sein. Warum? (Ist die Summe aller Zahlen auf der Tafel gerade oder ungerade?)
- Was weißt Du über Teilbarkeit?
- Kannst Du etwas in Faktoren zerlegen?
 - In der Schule werden oft Aufgaben zum Ausmultiplizieren gestellt. In vielen mathematischen Problemen ist es aber umgekehrt nützlicher, einen Ausdruck in Faktoren zu zerlegen und als Produkt darzustellen – aus den Faktoren kannst Du oft wichtige Informationen herleiten.

Spezielle mathematische Techniken:

So könntest Du denken ...

- A) „Die ersten spontanen Ansätze haben noch nichts gebracht. Ich mache jetzt mal eine Gedankenkarte mit spezielleren Ideen. Die Gedankenkarte bietet sich an, weil ich beim Sammeln von Ideen wieder mit Gedankensprüngen rechnen sollte.“
- B) „Die Idee zum Einfärben erscheint mir am aussichtsreichsten. Ich mache von dort einen Verweis auf ein neues Blatt 11.1“
- C) „Die Details zu einer Idee untersuche ich jetzt wieder auf einem separaten Blatt. Dazu mache ich wieder auf die übliche Weise Querverweise mittels Pfeilen: Von Blatt 11 nach 11.1 und zurück.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:



C)

<u>Einfärben</u>	11.1 11 ←
→ färbe alle Punkte in der Menge M rot	
→ färbe alle Punkte in der Menge N grün	
→ dann folgt:	
...	
...	

3.7 Wie kann ich neue Lösungsansätze erzeugen?

- Die Skizze im Abschnitt 2.3 zeigt eine Struktur, die aus zwei Elementen gebildet wird:
 - den einzelnen Ansätzen für eine Lösung und
 - den Weiterentwicklungen dieser Ansätze.
 In dieser Sichtweise hat Erfolg beim Problemlösen wesentlich mit zwei Fragen zu tun:
 - Wie erzeugst Du Ansätze für eine Lösung?
 - Wie entwickelst Du diese Ansätze weiter?
- Daraus ergeben sich ein paar Tipps:
 - Wenn die bisherigen Ansätze nicht erfolgreich waren, entwickle neue und andersartige Ansätze.
 - Du kannst versuchen, zu jedem Deiner bisherigen Ansätze „Verneinungen“ zu betrachten: Wenn Du einen Ansatz A ausprobiert hast – was könnte es dann bedeuten, eine Verneinung „Nicht-A“ auszuprobieren?

Neue Lösungsansätze mittels Verneinungen:
So könntest Du denken ...

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

- A) „Auf diesem Blatt schaue ich mal, was die Verneinungs-Technik hier liefert.“
- B) „Grundprinzip: Ich schreibe auf, was ich bislang getan und ausprobiert habe, und dann liste ich Verneinungen dazu auf.
 Wenn ich zum Beispiel ausmultipliziert habe:
 Wie könnte dann ein Nicht-Ausmultiplizieren aussehen?
 Ich könnte nach einer weitergehenden Faktorisierung suchen.
 Oder ich könnte künstlich Faktoren hinzufügen.
 Oder ich könnte einen vorhandenen Ausdruck durch einen anderen ersetzen.“

<u>Verneinungen</u>	11
→ ich habe A getan	→ ich habe C getan
→ Ideen zu nicht-A:	→ Ideen zu nicht-C:
...	...
...	...
...	...
→ ich habe B getan	
→ Ideen zu nicht-B:	
...	
...	
...	

- Lass Dich bei der Entwicklung eines Ansatzes nicht oder nicht zu früh durch Schwierigkeiten stoppen. Untersuche die Schwierigkeiten und entwickle Möglichkeiten, dennoch weiterzukommen.
- Versuche, auch aus bislang erfolglosen Ansätzen Einsichten zu gewinnen. Du kannst zum Beispiel fragen, warum Dein aktueller Ansatz nicht weiter führt. Aus dem Verständnis einer Schwierigkeit ergeben sich manchmal neue Ansätze.
- Bei all diesen Arbeiten mit verschiedenen Ansätzen hilft die Organisation der Aufzeichnungen, den Überblick zu behalten.
- Kombiniere Objekte – Veränderungen – Beobachtungen
 Nimm ein Objekt aus dem Problem, verändere es und beobachte, was passiert.
 - Welche Objekte?
 - Zahlen, Funktionen, Figuren, Mengen usw., die in der Aufgabe auftauchen oder die Du im Zusammenhang mit der Aufgabe konstruieren kannst.
 - Welche Veränderungen?
 - vergrößern, verkleinern, umdrehen, weglassen, vervielfachen, zusammenfassen, zerlegen, mit etwas anderem kombinieren...
 - Welche Beobachtungen?
 - Welche Muster kannst Du erkennen?
 - Schau auf die größten und die kleinsten Elemente!
- Und schließlich: Sehr oft ist es sinnvoll, wenn Du Dein Wissen über die mathematischen Objekte, um die es in der Aufgabe geht, vergrößerst.

Objekte - Veränderungen - Beobachtungen:

So könntest Du denken ...

A) „Ich probiere es jetzt mit der Methode Objekte - Veränderungen - Beobachtungen.“

B) „Ich liste einmal die Objekte auf und zu jedem Objekt die Veränderungen, die mir dazu einfallen.“

C) „Dann suche ich wieder die aussichtsreichste Idee aus und untersuche sie weiter. Dabei benutze ich wieder die Technik, mit einem Vermerk „ → 17“ auf ein anderes Blatt zu verweisen.“

D) „Auf diesem Blatt untersuche ich also die Details. Dabei prüfe ich in der Methode OVB auch verschiedene Beobachtungen. Zum Beispiele schaue ich auf die größten und die kleinsten Elemente in einer Situation.“

„Je nach Erfolg kann ich am Ende zum Blatt 16 zurückkehren und dort eine andere Idee auswählen und weiter untersuchen.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

A)	<u>OVB:</u>	16
B)	→ Objekt A → vergrößern → weglassen → ...	→ Objekt C → verdoppeln → ...
C)	→ Objekt B → Was passiert für $N \rightarrow \infty$? → 17	

D)	<u>Objekt B:</u> <u>Was passiert für</u> <u>$N \rightarrow \infty$?</u>	<u>Schwierigkeiten</u> 17
	→ Rechnungen:	16 ←

3.8 Wie kann ich einen Lösungsplan entwerfen?

- Eine Ausrichtung *nur* auf immer neue Ansätze kann zu einem planlosen Herumprobieren führen. Sinnvoll ist deshalb das Zusammenspiel von zwei Sichtweisen:
 - Sichtweise aus der Luft:
Wie könnte die Lösung insgesamt aufgebaut sein? Wie könnte ein Lösungsplan aussehen?
 - Sichtweise vom Boden aus:
Welche Elemente, welche Details, welche Einsichten könnten in die Lösung einfließen?
Wie kann ich aus den Objekten und meinen Ideen dazu eine Lösung zusammenbauen?
- Wie lässt sich nun ein Lösungsplan konstruieren?
 - Hier kann es erneut helfen, mit dem Ziel zu beginnen und dann wiederholt zu fragen „Wie kann ich das erreichen?“: „Wie kann ich das Ziel erreichen?“ - „Indem ich A tue.“ - „Wie kann ich A erreichen?“ - „Indem ich B tue.“ Usw.
 - Beginne mit möglichen Bestandteilen einer Lösung und konstruiere daraus den weiteren Lösungsplan.
 - Lassen sich Lösungspläne zu verwandten Problemen anpassen?

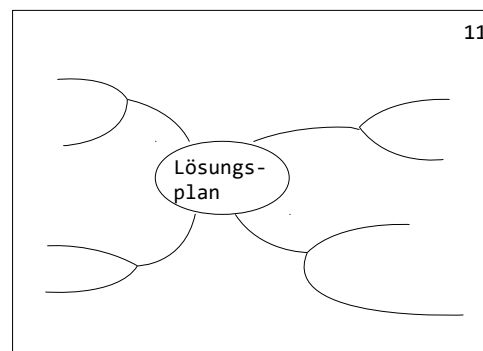
Einen Lösungsplan entwerfen:

So könntest Du denken ...

A) „Ich sammle einmal Ideen zu möglichen Lösungsplänen. Erfahrungsgemäß ist es schwer, das gleich in eine sinnvolle Ordnung zu bringen, deshalb fange ich mit einer Gedankenkarte an.“

„Und wie üblich kommen die Detail-Untersuchungen wieder auf separate Blätter.“

...und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:



3.9 Was kann ich tun, wenn ich feststecke?

- Schreib eine Liste mit Schwierigkeiten / Unklarheiten auf.
- Wo hakt es hier?
- Was passt Dir hier nicht?
- Schreib auf, warum es hier nicht weitergeht.
- Was ist merkwürdig an einem Objekt A?
- Wie könnte der nächste Ansatz aussehen?
- Was kannst Du als nächstes tun?
- Tu es!

Schwierigkeiten / Feststecken:

So könntest Du denken ...

- A) „Ich stecke hier fest.
Ich schreibe einmal auf, welche Schwierigkeiten ich hier sehe.“
- B) „Als nächstes kann ich dann Ideen sammeln, was ich als nächstes versuchen könnte.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

<u>Schwierigkeiten</u>	<u>Ideen</u>	13
→ Wo hakt es?	→ mögliche Ansätze: →	B)
→ Sonderbar an der Menge M:		

3.10 Wie kann ich in Bildern denken?

- Probier aus, was Dir hilft:
 - Du kannst zunächst im Kopf in Bildern zu denken und nur von Zeit zu Zeit Deine Gedanken auf Papier zusammenfassen.
 - Du kannst für einen anschaulichen Ansatz einen griffigen Namen vergeben und zunächst nur den notieren – dann geht die Idee nicht verloren.
 - Du kannst freie Skizzen zu Deinen bildlichen Vorstellungen machen.
 - Du kannst mit dem Notizenmachen beginnen, wenn erste Schwierigkeiten auftreten.
- Deine Arbeitsweise soll zu Deiner Denkweise passen – sie kann ein Zusammenspiel sein von Dingen im Kopf und Dingen auf Papier: Freie Skizzen, geometrische Figuren, mathematische Formeln, Tabellen und Texte.

In Bildern denken:

So könntest Du denken ...

- A) „Ich habe eine unscharfe anschauliche Vorstellung im Kopf – die Objekte in der Aufgabe bewegen sich wie auf Schienen.
Ich nenne das einmal den „Schienen-Ansatz“ und experimentiere mit dieser Anschauung im Kopf herum.“
- „Ich mache jetzt mal eine Skizze dazu.“
- B) „Ich beschäftige mich in einer separaten Liste mit den Schwierigkeiten, auf die ich hier stoße.“

... und so könnten Deine Aufzeichnungen aussehen:

<u>„Schienen-Ansatz“</u>	<u>Schwierigkeiten</u>	15
→ Skizze:	→ Wo hakt es? → ... → ...	B)

3.11 Wie kann ich prüfen, ob meine Lösung richtig ist?

- Kannst Du die Lösung auf andere Weise herleiten?
- Kannst Du auf einen Blick sehen, dass die Lösung stimmt?

3.12 Wie kann ich mathematisches Wissen über Dinge in der Aufgabe erwerben?

- Bücher, Internet, Gespräche, ...
- Veranschaulichungen (in Grafiken, Videos, Apps) sind oft sehr aufschlussreich.
 - Hinweise auf Veranschaulichungen:
 - Nutze die Bildersuche im Internet.
 - Schau einmal nach der Geometrie-Software Cinderella oder nach der Software Mathematica.

3.13 Was sollte ich vermeiden?

- Wenn sich über längere Zeit keine neuen Einsichten zu einer Aufgabe ergeben:
Beiß Dich nicht fest.
Stattdessen: Probiere es nach einer Pause oder am folgenden Tag erneut, mach Musik, einen Spaziergang usw.

3.14 Wie kann ich die fertige Lösung aufschreiben?

- Allgemeines Vorgehen:
 - Welche Gegenstände treten in der Aufgabe und in der Lösung auf?
 - Führe dafür Bezeichnungen ein.
 - Fertige eine präzise Skizze als Teil der Lösung an.
- Formuliere, was bewiesen werden soll.
- Gliedere Deinen Beweis
 - Beschreibe Schritt 1, Schritt 2, ...
 - Mache Fallunterscheidungen.
 - Formuliere Zwischenbehauptungen.
 - Kennzeichne das Ende eines Beweises.
- Schreib guten mathematischen Stil:
 - Schreibe in vollständigen Sätzen.
 - Formuliere klare, überschaubare Sätze.
 - Wähle gute Bezeichnungen:
 - Benutze ähnliche Bezeichnungen für ähnliche Gegenstände.
 - Mache Hierarchien in den Bezeichnungen deutlich – benutze Großbuchstaben für übergeordnete und Kleinbuchstaben für untergeordnete Gegenstände.
 - Gutes Beispiel: Mengen M, N mit Elementen m und n .
 - Schlechtes Beispiel: Mengen x und n mit Elementen y und X .
 - Vermeide Symbole am Satzanfang.
 - Gutes Beispiel: Es sei M die Menge aller Zahlen mit der folgenden Eigenschaft...
 - Schlechtes Beispiel: M sei die Menge aller Zahlen mit der folgenden Eigenschaft...
 - Vermeide es, zwei Symbole hintereinander zu schreiben, wenn sie nicht einen gemeinsamen Term bilden.
 - Gutes Beispiel: Gegeben seien m Mengen mit je k Elementen.
 - Schlechtes Beispiel: Gegeben seien m k -elementige Mengen.

4 Leseempfehlungen und Links

Bücher

- „Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben“ von Hanns-Heinrich Langmann, Erhard Quaisser, Eckard Specht (Hrsg.)
- „Schule des Denkens“ von George Polya
- „Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch denken“ von John Mason

in englischer Sprache:

- „Problem Solving Strategies“ von Arthur Engel
- „The Art and Craft of Problem Solving“ von Paul Zeitz
- „How to Solve Problems: New Methods and Ideas“ von Spyros Kalomitsines

Webseiten

- <http://www.wurzel.org/>

in englischer Sprache

- <https://terrytao.wordpress.com/career-advice/solving-mathematical-problems/>

5 Zum Abschluss: Übersicht der Denkwerkzeuge

Denkwerkzeuge

Was kann ich in jeder Situation versuchen?

- sammle Ideen für Fortschritte: (Abkürzung: FS)
 - Leitfragen:
 - wie könnte ich hier weiterkommen?
 - was könnte ein sinnvoller nächster Schritt sein?
- sammle und untersuche Fragen (Abkürzung: F)
 - was sind hier die Kern-Fragen?
- sammle und untersuche Schwierigkeiten (Abkürzung: S)
 - wo hakt es hier?
 - was ist hier unklar?
- sammle Ziele und mache einen Plan (Abkürzungen: Z/P)
 - was will ich?
 - wie kann ich das erreichen?
- sammle Ideen (Abkürzung: I)

Wie kann ich anfangen?

- führe Bezeichnungen ein, benenne Objekte
- schreib auf: was ist bekannt? was ist gesucht?
- fertige eine Tabelle an
- fertige eine Zeichnung an
- führe Hilfsgrößen ein
- fertige andere Darstellungen an
- werte die gegebenen Informationen aus
 - schreibe erste Schlussfolgerungen auf
- werte Dein mathematisches Wissen aus
 - schreib auf, was Du über die Objekte weißt
 - schreib auf, welche Zusammenhänge Du kennst, insbesondere zwischen dem Bekannten und dem Gesuchten

Welche Standard-Ansätze kann ich untersuchen?

- schreib auf, welche Lösungsansätze Dir spontan einfallen
- suche nach verwandten Problemen
 - schreibe auf, welche verwandten Probleme Du kennst und was Du über sie weißt
- verändere das Problem
 - betrachte sehr einfache oder spezielle Fälle
 - betrachte extreme Fälle und Grenzfälle
 - was passiert, wenn etwas immer größer oder immer kleiner wird?
- zerlege das Problem in Teile
 - unterscheide verschiedene Fälle
- suche vorwärts, suche rückwärts
 - vorwärts: was lässt sich aus den Voraussetzungen schließen?
 - rückwärts: fang mit dem Ziel an - wie könnte der vorletzte Schritt aussehen?
- kannst Du eine Lösung erraten?
- probiere verschiedene Beweistechniken aus
 - direkter Beweis
 - Beweis durch Widerspruch

Welche speziellen mathematischen Tricks kann ich ausprobieren?

- spielt ein Wechsel zwischen gerade und ungerade eine Rolle?
- was ist über Teilbarkeit bekannt?
- kannst Du etwas in Faktoren zerlegen?
- was passiert, wenn Du Dinge einfärbst?
- kannst Du Symmetrien erkennen oder konstruieren?
- kannst Du Invarianten erkennen oder konstruieren, also Größen, die sich nicht verändern?
- kannst Du das Schubfachprinzip benutzen?

Wie kann ich neue Lösungsansätze erzeugen?

- schreib in einer Liste zu jedem bisher untersuchten Ansatz auf, wie mögliche Verneinungen zu diesem Ansatz aussehen könnten
- nimm ein Objekt aus dem Problem, verändere es und beobachte, was passiert
 - welche Objekte?
 - Zahlen, Funktionen, Figuren, Mengen, ...
 - welche Veränderungen?
 - vergrößern, verkleinern, umdrehen, weglassen, vervielfachen, mit etwas anderem kombinieren...
 - welche Beobachtungen?
 - welche Muster kannst Du erkennen?
 - schau auf die größten und die kleinsten Elemente!

Wie kann ich einen Lösungsplan entwerfen?

- mit dem Ziel beginnen und wiederholt fragen „wie kann ich das erreichen?“
- mit möglichen Lösungsbausteinen beginnen und daraus den weiteren Lösungsplan konstruieren
- lassen sich Lösungspläne zu verwandten Problemen anpassen?

Was kann ich tun, wenn ich feststecke?

- schreib eine Liste mit Schwierigkeiten / Unklarheiten auf
- wo hakt es hier?
- schreib auf, warum es hier nicht weitergeht
- wie könnte der nächste Ansatz aussehen?
- was kannst Du als nächstes tun?
- tu es!

Wie kann ich prüfen, ob meine Lösung richtig ist?

- kannst Du die Lösung auf andere Weise herleiten?
- kannst Du auf einen Blick sehen, dass die Lösung stimmt?

Wie kann ich mathematisches Wissen über Dinge in der Aufgabe erwerben?

- Bücher, Internet, Gespräche, ...
- Veranschaulichungen (in Grafiken, Videos, Apps) sind oft sehr aufschlussreich

Was sollte ich vermeiden?

- wenn sich über längere Zeit keine neuen Einsichten zu einer Aufgabe ergeben:
 - beiß Dich nicht fest, sondern probiere es nach einer Pause oder am folgenden Tag erneut

Wie finde ich eigene Denkwerkzeuge?

- Hilfsfragen
 - In welchen Situationen könntest Du Hilfe brauchen?
 - Wie könnten geeignete Denkwerkzeuge für diese Situationen aussehen?
- Insbesondere:
 - was kannst Du tun, um neue, andersartige Ansätze zu erzeugen?
 - was kannst Du tun, um Ansätze besser weiter zu entwickeln?
 - was kannst Du tun, wenn Du feststeckst?
- für welche mathematischen Objekte sind welche Denkwerkzeuge nützlich?
- formuliere alle Tipps so, dass sie zu Dir passen

Aufzeichnungen

Wie kann ich Aufzeichnungen machen?

- Vorschlag für das Layout der Notizen:
 - Format A4
 - Querformat
 - 2 Spalten
 - ggf. kariertes Papier
- schreib nur auf der Vorderseite
- benutze Gedankenkarten

Wie kann ich die Aufzeichnungen organisieren?

- nummeriere die Blätter
- ordne die Blätter in einer Art Baum-Struktur an:
 - 1
 - 1.1
 - 1.1.1
 - 1.2
 - 2
 - 2.1
 - 2.1.1 ...
- füge neue Blätter nach Bedarf ein
- schreib bei Bedarf Zusammenfassungen
- bilde Ketten von Blättern
 - stell immer wieder Fragen
 - betrachte immer wieder die Schwierigkeiten